

Mecánica Clásica II

Tema 3: Mecánica do corpo ríxido

José M. Sánchez de Santos
Departamento de Física de Partículas
Facultade de Física
USC

Notas de clase da materia Mecánica Clásica II do Grao en Física da USC.
Versión 2016

Índice

| | |
|---|-----------|
| 1. Rotacións e tensores | 3 |
| 1.1. Cambios de base ortonormal | 3 |
| 1.1.1. Exemplo: rotacións no plano | 5 |
| 1.2. Convenio de Einstein | 6 |
| 1.3. Escalares e vectores | 6 |
| 1.4. Tensores de segunda orde | 7 |
| 1.5. Tensores de orde superior | 8 |
| 1.6. Operacións con tensores | 8 |
| 1.7. Diagonalización dun tensor simétrico | 10 |
| 1.8. Pseudovectores e produto vectorial | 10 |
| 1.9. Bases non ortogonais | 12 |
| 1.10. Rotacións infinitesimais | 13 |
| 2. Cinemática do corpo ríxido | 14 |
| 2.1. Tensor de inercia | 15 |
| 2.1.1. Exemplo: tensor de inercia dun sistema discreto de 3 partículas | 17 |
| 2.1.2. Exemplo: tensor de inercia dun cubo homoxéneo | 18 |
| 2.2. Momento angular | 18 |
| 2.3. Momentos principais de inercia e eixos principais | 19 |
| 2.3.1. Exemplo: eixos principais dun cubo | 19 |
| 2.4. Teorema de Steiner | 20 |
| 2.4.1. Exemplo: tensor de inercia dun cubo homoxéneo res- pecto ao CM | 21 |
| 2.5. Ángulos de Euler | 22 |
| 3. Dinámica do corpo ríxido | 23 |
| 3.1. Ecuacións de Euler | 23 |
| 3.1.1. Caso libre | 24 |
| 3.1.2. Caso con momentos externos | 25 |
| 3.1.3. Conservación da enerxía | 27 |
| 3.2. Trompo simétrico libre | 27 |
| 3.3. Trompo simétrico pesado cun punto fixo | 28 |
| 3.4. Estabilidade das solucións | 30 |

1. Rotacións e tensores

O concepto de *escalar* refírese a unha magnitude M que permanece invariante baixo as transformacións de coordenadas:

$$M(x, y) = M(x', y').$$

Por exemplo, se M representa a masa dunha partícula con coordenadas (x, y) nun certo sistema, esta non cambia se cambiamos o sistema de xeito que as novas coordenadas sexan (x', y') . A masa é polo tanto un escalar como tamén o son a temperatura, a presión, a enerxía, etc.

Outras cantidades si dependen do sistema de coordenadas, como a velocidade ou a forza, e son descritas mediante *vectores*. Da mesma maneira que un escalar é invariante, os vectores poden definirse en relación coas súas propiedades de transformación en relación cos cambios de coordenadas.

Esta idea xeneralízase e definiremos *tensores*, magnitudes con propiedades ben definidas ante as transformacións de coordenadas. Neste capítulo restrinxirémonos a *transformacións ortogonais* en tres dimensións e falaremos de *tensores cartesianos*. No tema seguinte estenderemos as mesmas ideas ás *transformacións de Lorentz* en catro dimensións para introducir os *tensores de Lorentz*.

1.1. Cambios de base ortonormal

Sexa un sistema de coordenadas con eixos nas direccións dos vectores unitarios $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ que forman unha base ortonormal, é dicir, os seus produtos escalares satisfán: $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$, onde $i, j = 1, 2, 3$ e δ_{ij} é o símbolo de Kronecker:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Un punto calquera terá vector de posición:

$$\mathbf{r} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3,$$

onde as compoñentes x_i son as proxeccións de r sobre as direccións dadas polos vectores da base: $x_i = \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_i$.

Se facemos unha transformación do sistema de coordenadas, un cambio de base, os novos eixos están nas direccións dos vectores da nova base e o vector de posición poderá poñerse agora:

$$\mathbf{r} = x'_1 \mathbf{e}'_1 + x'_2 \mathbf{e}'_2 + x'_3 \mathbf{e}'_3,$$

onde $x'_i = \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}'_i$, sendo a nova base tamén ortonormal: $\mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_j = \delta_{ij}$. As compoñentes na nova base poden expresarse linearmente en función das

compoñentes na base antiga:

$$\begin{aligned} x'_1 &= \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}'_1 = (x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3) \cdot \mathbf{e}'_1 = \\ &= x_1(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}'_1) + x_2(\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}'_1) + x_3(\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}'_1) = \\ &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \end{aligned}$$

onde

$$a_{ij} = \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}'_i = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_j = \cos(\mathbf{e}'_i, \mathbf{e}_j)$$

son os cosenos directores, os cosenos dos ángulos que forman os vectores dunha das bases cos da outra. Analogamente se poden expresar as demais compoñentes:

$$\begin{aligned} x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ x'_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3, \end{aligned}$$

ou

$$x'_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij}x_j.$$

As cantidades a_{ij} forman a matriz de cambio de base A :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

e, en forma matricial escribimos:

$$\mathbf{r}' = A \cdot \mathbf{r}.$$

Para obter a transformación inversa, simplemente hai que intercambiar $\mathbf{e}_i \leftrightarrow \mathbf{e}'_i$, ou sexa $a_{ij} \leftrightarrow a_{ji}$ e, polo tanto:

$$\mathbf{r} = A^{-1} \cdot \mathbf{r}',$$

con

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} = A^T.$$

A matriz A é tal que a súa inversa é igual á súa trasposta: é unha *matriz ortogonal*:

$$A \cdot A^T = A^T \cdot A = \mathbf{1}.$$

As relacións anteriores escribíense en compoñentes:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 a_{ki}a_{li} &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \delta_{ij}a_{ki}a_{lj} = \delta_{kl} \\ \sum_{i=1}^3 a_{ik}a_{il} &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \delta_{ij}a_{ik}a_{jl} = \delta_{kl}, \end{aligned} \quad (1)$$

que son 6 relacións independentes de ortogonalidade en cada caso. Fixémosnos que o índice sobre o que se suma ocupa o segundo lugar en ambos factores na primeira ecuación e o primeiro lugar na segunda. Isto é porque estamos multiplicando unha matriz pola súa trasposta, ou sexa, filas por filas ou columnas por columnas. Lembremos que, dado que as entradas da matriz de cambio de base non son máis que as compoñentes dos vectores dunha base na outra, estas condicións reflicten o feito de que as bases son ortonormais: os produtos escalares dunha fila (columna) por si mesma son 1 e os dunha fila (columna) por outra distinta son 0.

1.1.1. Exemplo: rotacións no plano

Se consideramos unha base ortonormal do plano euclídeo e realizamos unha rotación de ángulo θ como na figura:

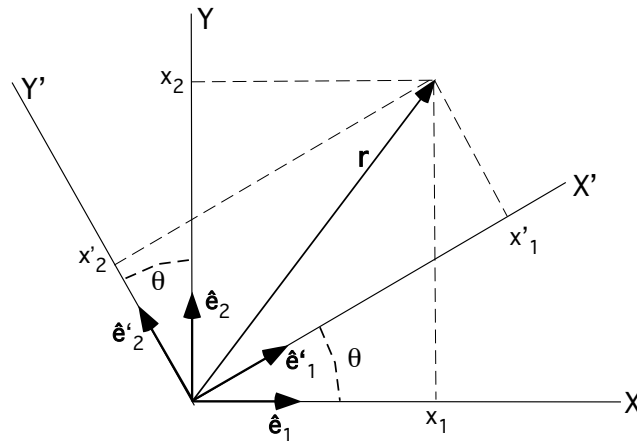


Figura 1: Rotacións no plano

$$\mathbf{r} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 = x'_1 \mathbf{e}'_1 + x'_2 \mathbf{e}'_2$$

$$x'_1 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}'_1 = x_1 (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}'_1) + x_2 (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}'_1) = x_1 \cos \theta + x_2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

$$x'_2 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}'_2 = x_1 (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}'_2) + x_2 (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}'_2) = x_1 \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) + x_2 \cos \theta,$$

e a matriz da rotación é:

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) & \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta \\ -\text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

1.2. Convenio de Einstein

No cálculo tensorial aparecen por doquier expresións que conteñen sumatorios sobre algún índice. Para simplificar as ecuacións seguiremos o *convenio de Einstein* de suma sobre índices repetidos: sobreentenderase que en toda expresión onde haxa un índice que se repite no mesmo membro hai que sumar dito índice sobre todos os valores posibles. Así reescribiremos as expresións do xeito que amosamos a continuación:

$$\begin{aligned}x'_i &= \sum_{j=1}^3 a_{ij}x_j \quad \rightarrow \quad x'_i = a_{ij}x_j \\ \sum_{i=1}^3 a_{ij}a_{ik} &= \delta_{jk} \quad \rightarrow \quad a_{ij}a_{ik} = \delta_{jk} \\ \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} &= \sum_{i=1}^3 x_i y_i \quad \rightarrow \quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_i y_i \\ \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \delta_{ij} a_{ik} a_{jl} &= \delta_{kl} \quad \rightarrow \quad \delta_{ij} a_{ik} a_{jl} = \delta_{kl}.\end{aligned}$$

Os índices repetidos, que van sumados, chámanse *índices mudos* e os índices non repetidos, que deben ser os mesmos en ambos membros da ecuación, chámanse *índices libres*. Ás veces hai situacións en que aparecendo un índice repetido non hai que sumar sobre el, nese caso indicárase explicitamente.

1.3. Escalares e vectores

As transformacións ortogonais deixan invariante o produto escalar de dous vectores. Efectivamente, para vectores calquera \mathbf{u} , \mathbf{v} :

$$\mathbf{u}' \cdot \mathbf{v}' = u'_i v'_i = (a_{ik} u_k)(a_{il} v_l) = a_{ik} a_{il} u_k v_l = \delta_{kl} u_k v_l = u_k v_k = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v},$$

onde utilizamos as condicións de ortogonalidade (1). En particular, a norma ou lonxitude dun vector tamén é invariante:

$$\|\mathbf{v}'\|^2 = \mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}' = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|^2,$$

e polo tanto as lonxitudes ou distancias son *escalares* baixo transformacións ortogonais, como corresponde a unha cantidade que non se transforma:

$$S = S'.$$

Observemos que nas expresións anteriores non hai ningún índice libre, todos os índices van sumados, son índices mudos.

En cambio, os vectores de posición vimos que se transformaban de acordo a:

$$x'_i = a_{ij}x_j.$$

En xeral definiremos un *vector* como un conxunto de compoñentes $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ que ante unha transformación ortogonal de coordenadas se transforman como

$$v'_i = a_{ij}v_j.$$

A lei de transformación das compoñentes dun vector é igual á da transformación das coordenadas dun punto. As compoñentes dun vector levan un índice que pode tomar os valores 1, 2, 3. Na expresión anterior hai un índice libre e aparece a matriz de cambio de base.

1.4. Tensores de segunda orde

Pasemos agora a tensores de 2ª orde. Sexan \mathbf{u} , \mathbf{v} dous vectores de compoñentes u_i , v_i . Definamos o obxecto $(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})$ formado por nove cantidades definidas da maneira seguinte

$$(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})_{ij} = u_i v_j.$$

Cada un dos produtos tensoriais dos vectores da base ten unha soa compoñente distinta de cero, por exemplo $(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2)_{12} = 1$ e as outras son nulas. De feito estes produtos forman unha base para os tensores de segunda orde. Por exemplo $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} = u_i v_j (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)$, ou en forma de matriz:

$$\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} = \begin{pmatrix} u_1 v_1 & u_1 v_2 & u_1 v_3 \\ u_2 v_1 & u_2 v_2 & u_2 v_3 \\ u_3 v_1 & u_3 v_2 & u_3 v_3 \end{pmatrix}$$

A este obxecto chámasele *produto tensorial ou diádico* dos vectores u_i , v_i . Vexamos como se transforman as súas compoñentes baixo unha transformación ortogonal:

$$(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})'_{ij} = u'_i v'_j = (a_{ik} u_k)(a_{jl} v_l) = a_{ik} a_{jl} u_k v_l = a_{ik} a_{jl} (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})_{kl}.$$

Temos agora unha lei de transformación distinta daquela dos escalares e dos vectores. A expresión anterior ten dous índices libres, e a matriz de cambio de base aparece dúas veces. O que estamos vendo é un exemplo de tensor de orde 2, que satisfai a definición que damos a continuación:

Chamamos *tensor de segunda orde* \mathbb{T} a un conxunto de $3^2 = 9$ cantidades t_{ij} que baixo un cambio ortogonal de coordenadas se transforman de acordo coa lei:

$$t'_{ij} = a_{ik} a_{jl} t_{kl}.$$

As t_{ij} son as compoñentes do tensor na base introducida anteriormente: $\mathbb{T} = t_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$. Podemos expresar tamén a lei de transformación dun tensor de segunda orde de forma matricial:

$$\mathbb{T}' = A \cdot \mathbb{T} \cdot A^T$$

1.5. Tensores de orde superior

O produto tensorial pode xeneralizarse para un número calquera de vectores, por exemplo para 3:

$$(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} \otimes \mathbf{w})_{ijk} = u_i v_j w_k$$

coa lei de transformación

$$(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} \otimes \mathbf{w})'_{ijk} = a_{il} a_{jm} a_{kn} (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} \otimes \mathbf{w})_{lmn}$$

Estas son as compoñentes dun tensor de 3ª orde, que en xeral se define como un obxecto con $3^3 = 27$ compoñentes etiquetadas por 3 índices e que cumpre a lei de transformación anterior ante cambios ortogonais de coordenadas:

$$\mathbb{T} = t_{ijk} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k,$$

onde as t_{ijk} se transforman:

$$t'_{ijk} = a_{il} a_{jm} a_{kn} t_{lmn}$$

Seguindo este procedemento podemos construír tensores de todas as ordes e definir un *tensor de orde n* como o obxecto formado por 3^n compoñentes $t_{i_1 i_2 \dots i_n}$:

$$\mathbb{T} = t_{i_1 i_2 \dots i_n} \mathbf{e}_{i_1} \otimes \mathbf{e}_{i_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_n},$$

que se transforman de acordo coa lei:

$$t_{i_1 i_2 \dots i_n} = a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \dots a_{i_n j_n} t_{j_1 j_2 \dots j_n}$$

O que chamáramos escalares e vectores son tensores de orde 0 e 1 respectivamente.

1.6. Operacións con tensores

Adición, subtracción. Os tensores de ordes iguais poden sumarse e restarse compoñente a compoñente, por exemplo:

$$(\mathbb{S} \pm \mathbb{T})_{ijk} = s_{ijk} \pm t_{ijk}$$

Multiplicación por un escalar. A multiplicación por un escalar deixa outro tensor da mesma orde:

$$(\lambda \mathbb{T})_{ijk} = \lambda t_{ijk}$$

Contraccións. A contracción de índices é unha operación que reduce a orde dos tensores e consiste en facer dous índices iguais e sumar sobre o que resulta, sexan índices de tensores distintos ou dun mesmo tensor. Vexamos exemplos:

- produto escalar de vectores:

Dados dous vectores de compoñentes u_i, v_j , o produto escalar ordinario non é máis que a contracción dos índices i, j :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_i v_i$$

- Traza dun tensor de segunda orde:

Dado un tensor de segunda orde t_{ij} , o resultado de contraer ambos índices é a suma dos elementos diagonais, a traza (un escalar):

$$t_{ii} = \text{Tr } \mathbb{T}.$$

En xeral esta operación realizada con dous índices dun mesmo tensor dá un tensor de dúas ordes menos que o inicial.

- Contracción dun tensor de segunda orde cun vector:

É a maneira habitual de actuar sobre un vector cunha aplicación linear:

$$u_i = t_{ij} v^j, \quad \mathbf{u} = \mathbb{T} \cdot \mathbf{v}$$

O resultado é outro vector xa que:

$$t'_{ij} v'_j = (a_{ik} a_{jl} t_{kl})(a_{jm} v_m) = a_{ik} a_{jl} a_{jm} t_{kl} v_m = a_{ik} \delta_{lm} t_{kl} v_m = a_{ik} (t_{kl} v_l)$$

- Contracción de índices de dous tensores de orde 2:

Se contraemos un só índice o resultado é outro tensor de orde 2 (o produto ordinario de matrices):

$$t_{ik} = r_{ij} s_{jk}, \quad \mathbb{T} = \mathbb{R} \cdot \mathbb{S}$$

Se contraemos os dous teremos un escalar:

$$t = r_{ij} s^{ji} = \text{Tr}(\mathbb{R} \cdot \mathbb{S})$$

produto tensorial. É unha xeralización do produto tensorial de vectores. O produto tensorial de dous tensores de ordes n e m é un tensor de orde $n + m$:

$$t_{i_1 \dots i_n j_1 \dots j_m} = r_{i_1 \dots i_n} s_{j_1 \dots j_m}, \quad \mathbb{T} = \mathbb{R} \otimes \mathbb{S}$$

1.7. Diagonalización dun tensor simétrico

Diagonalizar un tensor consiste en atopar unha base na que as súas compoñentes t_{ij} sexan 0 se $i \neq j$, é dicir, unha base na que só os elementos da diagonal sexan distintos de cero. O seguinte resultado será útil no seguinte e o enunciaremos sen demostración a modo de repaso:

Teorema: Calquera tensor simétrico pode poñerse en forma diagonal mediante unha transformación ortogonal. Os elementos da diagonal son entón únicos (excepto a orde) e os eixos correspondentes son tamén únicos (excepto dexeneración).

Os elementos da diagonal λ_i chámanse *valores propios* ou *autovalores* e os eixos correspondentes son os *eixos principais*, e van na dirección dos *vectores propios* \mathbf{v}_i . Os valores propios son as solucións da ecuación $\det(T - \lambda \mathbf{1}) = 0$, e unha vez temos os valores propios podemos calcular a dirección dos vectores propios (calquera vector nesa dirección, independentemente do seu sentido e o seu módulo, será propio) como a solución de $T\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i$ (aquí NON estamos sumando no índice i).

Lemas:

1 - Para un tensor real e simétrico as raíces da ec. secular son reais.

2 - Os vectores propios dun tensor simétrico correspondentes a valores propios distintos son perpendiculares.

3 - No caso de dexeneración dobre (tripla) a ecuación de autovalores ten dúas (tres) solucións perpendiculares entre si.

Existe polo tanto unha base (ortonormal) de autovectores na que o tensor adquire a forma diagonal. Se esta base se obtén da orixinal mediante $\mathbf{e}'_i = a_{ij}\mathbf{e}_j$, o tensor obterá a súa forma diagonal \bar{t}_{ij} tras transformalo de acordo con $\bar{t}_i = a_{il}a_{jm}t_{lm}$.

1.8. Pseudovectores e produto vectorial

Definamos o *símbolo de Levi-Civita* ϵ_{ijk} como

$$\epsilon_{123} = 1$$

e totalmente antisimétrico:

$$\epsilon_{P(ijk)} = (-1)^{\sigma(P)} \epsilon_{ijk},$$

é dicir, a súa compoñente ijk é 1 ou -1 dependendo do número de permutacións entre veciños necesarias para ordenar ijk como 123 e, obviamente, 0 se algún índice se repite.

Dados dous vectores A_i, B_i , o seu produto vectorial pode expresarse como:

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_i = \epsilon_{ijk} A_j B_k$$

que é equivalente á coñecida receita:

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix},$$

como se pode comprobar facilmente escribindo todos os termos de cada compoñente.

Estas expresións podemos utilizalas para definir rigorosamente o determinante dun tensor de 2ª orde. Sexan os tres vectores:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= (t_{11}, t_{12}, t_{13}) & A_l &= t_{1l} \\ \mathbf{B} &= (t_{21}, t_{22}, t_{23}) & B_l &= t_{2l} \\ \mathbf{C} &= (t_{31}, t_{32}, t_{33}) & C_l &= t_{3l}, \end{aligned}$$

entón:

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{vmatrix} = |t_{ij}|$$

por outro lado

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = A_i \epsilon_{ijk} B_j C_k = \epsilon_{ijk} t_{1i} t_{2j} t_{3k} = |t_{ij}| = t$$

En xeral temos que

$$t \epsilon_{ijk} = \epsilon_{lmn} t_{il} t_{jm} t_{kn}$$

Para unha transformación ortogonal:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T = \mathbf{1} \Rightarrow \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{A}^T) = 1 \Rightarrow (\det(\mathbf{A}))^2 = 1 \Rightarrow \det(\mathbf{A}) = \pm 1$$

e por ser entón $\det(\mathbf{A}) = a$ simplemente un signo podemos pasalo para o outro lado na expresión xeral do determinante e obter:

$$\epsilon_{ijk} = a \epsilon_{lmn} a_{il} a_{jm} a_{kn}$$

As transformacións para as cales $\det(\mathbf{A}) = 1$ chámanse *rotacións* ou *transformacións propias*.

As transformacións nas que $\det(\mathbf{A}) = -1$, por contra, chámanse *transformacións impropias* e involucran reflexión dun número impar de coordenadas.

Comprobemos agora como se transforma o produto vectorial. Sexa $\mathbf{V} = (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$:

$$\begin{aligned} V'_i &= \epsilon_{ijk} A'_j B'_k = a \epsilon_{lmn} a_{il} a_{jm} a_{kn} a_{jp} a_{kq} A_p B_q = \\ &= a \epsilon_{lmn} a_{il} \delta_{mp} \delta_{nq} A_p B_q = a a_{il} \epsilon_{lmn} A_m B_n = a a_{il} V_l \end{aligned}$$

Vemos que a lei de transformación é análoga á dun vector pero incluíndo o determinante da matriz de transformación. A este tipo de obxectos chámanse *pseudovectores* ou *vectores axiais*. Do mesmo xeito podemos definir pseudoescalares e pseudotensores como aqueles obxectos que se transforman como un escalar ou un tensor respectivamente, pero cambiando de signo se a matriz de cambio ten determinante -1. O propio símbolo de Levi-Civita é un pseudotensor de orde 3.

Outras cantidades que ata agora chamabamos vectores son en realidade vectores axiais ou pseudovectores. Por exemplo, o momento angular $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ é un pseudovector porque na súa lei de transformación o produto vectorial introduce o determinante da matriz de transformación. Outro pseudovector é a velocidade angular. O nome de vector axial é obvio pois estas cantidades están asociadas a un eixo de rotación.

De todos os xeitos, no espazo físico ordinario no que se moven os corpos materiais, as únicas transformacións posibles son as propias, as rotacións, e como o seu determinante ten signo positivo, non será necesario distinguir os tensores dos pseudotensores.

1.9. Bases non ortogonais

Ata este momento tratamos sempre con bases vectoriais ortogonais, é dicir, todos os vectores da base eran perpendiculares. Non obstante, nada nos impide tomar unha base non ortogonal. Nesta base o módulo dun vector $\mathbf{r} = x^1 \mathbf{e}_1 + x^2 \mathbf{e}_2 + x^3 \mathbf{e}_3$ sería

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = |\mathbf{r}|^2 = (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) x^i x^j = g_{ij} x^i x^j$$

onde definimos a *matriz métrica* g_{ij} como $g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$. Se a base é ortonormal $g_{ij} = \delta_{ij}$ e a fórmula redúcese á fórmula euclídea habitual.

Cando escribimos a forma xeral dun vector como $\mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i$ estamos definindo as *compoñentes contravariantes* de \mathbf{v} . Tamén podemos definir as chamadas *compoñentes covariantes*:

$$v_i = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{v} = (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) v^j = g_{ij} v^j$$

Cando a base é ortonormal as compoñentes covariantes e contravariantes coinciden, pois a métrica é δ_{ij} . Con todo, en bases xerais isto non será así, e as compoñentes que usamos para escribir un vector como suma de vectores da base non coinciden coa proxección do vector sobre a base.

Vexamos como se transforman unhas e outras. Sexa un vector calquera $\mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i = v'^i \mathbf{e}'_i$, onde as bases relaciónanse mediante $\mathbf{e}'_i = a_i^j \mathbf{e}_j$. Obsérvase que denotamos agora os elementos da matriz de cambio de base cun índice e un superíndice. É tamén importante a orde en que estes aparecen, xa que por ser unha matriz ortogonal, a trasposta é igual que a inversa: $a_k^i a_i^j = \delta_k^j$, e polo tanto $\mathbf{e}_i = a_i^j \mathbf{e}'_j$.

As compoñentes covariantes transforman coa mesma lei que os vectores da base:

$$v'_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}'_i = v^j \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}'_i = v^j \mathbf{e}_j \cdot a_i^k \mathbf{e}_k = v^j a_i^k g_{jk} = a_i^k v_k$$

Polo contrario, as compoñentes contravariantes transforman coa matriz trasposta ou inversa:

$$\mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i = v^i a_i^j \mathbf{e}'_j = v'^j \mathbf{e}'_j \Rightarrow v'^j = a_i^j v^i$$

Para que unha contracción de dous índices dun tensor se comporte tensorialmente deben contraerse un índice covariante e outro contravariante, de xeito que as transformacións se compensen e no obxecto resultante só haxa que transformar os índices restantes. Por exemplo, o produto escalar de dous vectores quedaría

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v^i \mathbf{e}_i \cdot w^j \mathbf{e}_j = v^i w^j g_{ij} = v^i w_i$$

Todo isto será relevante na formulación tensorial da relatividade especial, xa que alí a métrica non é a euclídea, senón a métrica de Minkowski.

1.10. Rotacións infinitesimais

A pesar de que unha rotación tridimensional ten 3 parámetros libres, en xeral estes tres parámetros non formarán un vector, xa que dúas rotacións finitas non conmutan (e a suma de vectores si, polo tanto non poderíamos combinar os vectores asociados a cada rotación). Isto non é así para rotacións infinitesimais.

Sexa unha rotación infinitesimal $\Lambda = \mathbf{1} + \Delta$ con Δ unha matriz na que as compoñentes son números moi pequenos. Dúas rotacións consecutivas actuarían entón como:

$$\Lambda_1 \cdot \Lambda_2 = (\mathbf{1} + \Delta_1) \cdot (\mathbf{1} + \Delta_2) = \mathbf{1} + \Delta_1 + \Delta_2 + \mathcal{O}(\Delta^2) = (\mathbf{1} + \Delta_2) \cdot (\mathbf{1} + \Delta_1) = \Lambda_2 \cdot \Lambda_1$$

se desprezamos o termo $\mathcal{O}(\Delta^2)$ por ser moi pequeno, termo que introduciría unha distinción entre as dúas formas de ordenar as rotacións.

Ademais:

$$(\mathbf{1} + \Delta) \cdot (\mathbf{1} - \Delta) = \mathbf{1} + \Delta - \Delta + \mathcal{O}(\Delta^2) = \mathbf{1} + \mathcal{O}(\Delta^2) \Rightarrow (\mathbf{1} + \Delta)^{-1} = \mathbf{1} - \Delta$$

e por ser a transformación ortogonal

$$\Lambda^{-1} = \Lambda^T \Rightarrow \mathbf{1} + \Delta^T = \mathbf{1} - \Delta \Rightarrow \Delta^T = -\Delta,$$

a matriz Δ ten que ser antisimétrica.

Parametrizando Δ como:

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & -d\Omega_3 & d\Omega_2 \\ d\Omega_3 & 0 & -d\Omega_1 \\ -d\Omega_2 & d\Omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

podemos escribir a variación dun vector despois de aplicarlle a transformación da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} d\mathbf{r} = \mathbf{r}' - \mathbf{r} &= (\mathbb{1} + \Delta) \cdot \mathbf{r} - \mathbf{r} = \Delta \mathbf{r} = \begin{pmatrix} 0 & -d\Omega_3 & d\Omega_2 \\ d\Omega_3 & 0 & -d\Omega_1 \\ -d\Omega_2 & d\Omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} d\Omega_2 x^3 - d\Omega_3 x^2 \\ d\Omega_3 x^1 - d\Omega_1 x^3 \\ d\Omega_1 x^2 - d\Omega_2 x^1 \end{pmatrix} = d\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} \end{aligned}$$

Por tanto $d\boldsymbol{\Omega}$ é un pseudovector, o *pseudovector de rotación*. Se o vector $d\boldsymbol{\Omega}$ é colineal con \mathbf{r} entón $d\mathbf{r} = 0$, é dicir, existe unha dirección invariante (eixo de rotación) na cal está o vector de rotación. O seu módulo é o ángulo infinitesimal xirado, e o seu sentido depende do sentido de xiro mediante a regra do sacarrollas.

Podemos ver que para un corpo xirando

$$d\mathbf{r} = d\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} \Rightarrow \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \times \mathbf{r} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

é dicir, se temos un sistema de eixos xiratorios ou móbiles e outro fixo, a variación no tempo dun vector no sistema que xira será a mesma que no sistema fixo corrixida por un termo debido á rotación da forma anterior:

$$\left. \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right|_{\text{fixos}} = \left. \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right|_{\text{móbiles}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$$

2. Cinemática do corpo ríxido

Un corpo ou sólido ríxido é un sistema de partículas con posicións relativas constantes, $\|\mathbf{r}_{ij}\| = c_{ij}$. Para un sistema continuo isto significa que a distancia entre elementos de masa e a masa de cada diferencial de volume permanecen constantes.

As magnitudes que para sistemas discretos definiamos coma sumas sobre

partículas agora pasan a ser integrais sobre o volume do sólido:

$$\begin{aligned} \text{Masa total: } M &= \sum_{i=1}^n m_i \rightarrow M = \int_V dm = \int_V \rho dV \\ \text{Centro de masas: } \mathbf{R} &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i \rightarrow \frac{1}{M} \int_V \mathbf{r} dm \\ \text{Momento total: } \mathbf{P} &= \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{p}_i \rightarrow \int_V \mathbf{p} dm \\ &\dots \end{aligned}$$

O estado dun corpo ríxido pode determinarse sen ambigüidade mediante as coordenadas respecto a un determinado sistema de referencia de 3 puntos non colineares do mesmo (9 números), entre os que hai 3 ligaduras (as distancias entre cada parella de puntos). Polo tanto, o corpo ríxido ten 6 graos de liberdade.

A forma máis conveniente de describir o estado dun corpo é dando a posición dun punto (normalmente o centro de masas do sistema) e a orientación dun sistema de eixos ligado a ese punto e solidario ó sólido relativa ó sistema respecto ó cal medimos. Obviamente para esta descrición necesitamos seis parámetros, un por grao de liberdade do corpo (3 ligados a unha traslación e outros 3 a unha transformación infinitesimal).

2.1. Tensor de inercia

Sexa un sistema discreto de partículas. A súa enerxía cinética será

$$T = \sum_{\alpha=1}^n \frac{1}{2} m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha}^2$$

e como a velocidade dunha partícula podémola escribir en xeral como

$$\mathbf{v}_{\alpha} = \mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\alpha},$$

onde \mathbf{V} é a velocidade de traslación e $\boldsymbol{\omega}$ a velocidade de rotación con respecto a uns eixos fixos. Polo tanto:

$$T = \frac{1}{2} M \mathbf{V}^2 + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\alpha})^2 + \sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} \mathbf{V} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\alpha})$$

O termo da forma $\sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{V} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\alpha})$ anúlase cando tomamos a orixe do sistema de referencia móbil no centro de masas do corpo. Neste caso será válida a descomposición:

$$T = T_{\text{tras}} + T_{\text{rot}},$$

onde

$$T_{\text{tras}} = \frac{1}{2} M \mathbf{V}^2$$

é a enerxía cinética do CM e

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\alpha})^2$$

é a enerxía cinética de rotación con respecto ao mesmo CM.

Usando

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})^2 = |\mathbf{A}|^2 |\mathbf{B}|^2 \sin^2 \alpha = |\mathbf{A}|^2 |\mathbf{B}|^2 (1 - \cos^2 \alpha) = |\mathbf{A}|^2 |\mathbf{B}|^2 - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^2$$

escribimos o termo de enerxía cinética de rotación como

$$\begin{aligned} T_{\text{rot}} &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\alpha})^2 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} [\boldsymbol{\omega}^2 \mathbf{r}_{\alpha}^2 - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_{\alpha})^2] = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} [\delta_{ij} \omega_j \omega_i x_{\alpha,k} x_{\alpha,k} - (\omega_i x_{\alpha,i})(\omega_j x_{\alpha,j})] = \\ &= \frac{1}{2} \omega_i \left[\sum_{\alpha} m_{\alpha} (\delta_{ij} x_{\alpha,k} x_{\alpha,k} - x_{\alpha,i} x_{\alpha,j}) \right] \omega_j \end{aligned}$$

Temos entón que:

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \omega_i I_{ij} \omega_j,$$

onde definimos

$$I_{ij} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\delta_{ij} x_{\alpha,k} x_{\alpha,k} - x_{\alpha,i} x_{\alpha,j})$$

como as compoñentes do *tensor de inercia* \mathbb{I} , que tamén se pode expresar en forma matricial como:

$$\begin{aligned} \mathbb{I} &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\mathbf{r}_{\alpha}^2 \mathbf{1} - \mathbf{r}_{\alpha} \otimes \mathbf{r}_{\alpha}) \\ \mathbb{I} &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \begin{pmatrix} y_{\alpha}^2 + z_{\alpha}^2 & -x_{\alpha} y_{\alpha} & -x_{\alpha} z_{\alpha} \\ -x_{\alpha} y_{\alpha} & x_{\alpha}^2 + z_{\alpha}^2 & -z_{\alpha} y_{\alpha} \\ -x_{\alpha} z_{\alpha} & -z_{\alpha} y_{\alpha} & y_{\alpha}^2 + x_{\alpha}^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

A expresión da enerxía cinética de rotación pode daquela escribirse tamén:

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbb{I} \cdot \boldsymbol{\omega}$$

Para distribucións continuas de materia:

$$\mathbb{I} = \int_V dm [\mathbf{r}^2 \mathbf{1} - \mathbf{r} \otimes \mathbf{r}] \Rightarrow \mathbb{I} = \int_V dV \rho [\mathbf{r}^2 \mathbf{1} - \mathbf{r} \otimes \mathbf{r}]$$

Este tensor de inercia ten as seguintes propiedades:

- É un tensor de segunda orde. Isto dedúcese inmediatamente da definición, pois se trata dunha combinación de tensores e escalares. Polo tanto, ante unha transformación ortogonal (unha rotación dos eixos) transformarase de acordo con:

$$I'_{ij} = a_{ik}a_{jl}I_{kl}.$$

En forma matricial:

$$\mathbb{I}' = A \cdot \mathbb{I} \cdot A^T$$

- É real e simétrico ($I_{ij} = I_{ji}$) (e polo tanto será diagonalizable)
- É aditivo: o tensor de inercia de varias partículas ou dun sistema composto de varias partes é a suma dos tensores de inercia de cada partícula ou parte.
- Depende da orixe do sistema de coordenadas e da elección dos eixos.

Como a velocidade angular está dirixida na dirección do eixo de rotación, se \mathbf{n} é o vector unitario nesta dirección $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{n}$ e:

$$T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbb{I} \cdot \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \omega (\mathbf{n} \cdot \mathbb{I} \cdot \mathbf{n}) \omega = \frac{1}{2} I_{\mathbf{n}} \omega^2$$

onde definimos o momento de inercia respecto a unha dirección \mathbf{n} como

$$I_{\mathbf{n}} = \mathbf{n} \cdot \mathbb{I} \cdot \mathbf{n}$$

Podemos ver polo tanto que os elementos da diagonal son os momentos de inercia con respecto aos tres eixos coordenados. Os termos non diagonais son os chamados *produtos de inercia*.

2.1.1. Exemplo: tensor de inercia dun sistema discreto de 3 partículas

Sexan tres partículas da mesma masa m con posicións $(a, 0, 0)$, $(0, a, 2a)$ e $(0, 2a, a)$ respecto a un sistema de eixos. O tensor de inercia do conxunto ríxido é a suma dos tensores asociados a cada unha das partículas. Neste caso:

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_1 &= m \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix} \\ \mathbb{I}_2 &= m \begin{pmatrix} 5a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 4a^2 & -2a^2 \\ 0 & -2a^2 & a^2 \end{pmatrix} \\ \mathbb{I}_3 &= m \begin{pmatrix} 5a^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & -2a^2 \\ 0 & -2a^2 & 4a^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e o tensor de inercia do sistema:

$$\mathbb{I} = ma^2 \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -4 \\ 0 & -4 & 6 \end{pmatrix}$$

2.1.2. Exemplo: tensor de inercia dun cubo homoxéneo

Sexa un cubo macizo homoxéneo de masa M e lado a . Consideremos o sistema centrado nun vértice e cos eixos na dirección das arestas do cubo. Sexa $\rho = \frac{M}{a^3}$ a densidade. Calculemos as compoñentes do tensor de inercia.

$$\begin{aligned} I_{11} &= \int_V \rho(x_2^2 + x_3^2) dV = \rho \int_0^a dx_1 \int_0^a dx_2 \int_0^a dx_3 (x_2^2 + x_3^2) = \\ &= \rho a \int_0^a dx_2 \left(x_2^2 a + \frac{a^3}{3} \right) = \rho a \left(\frac{a^3}{3} + \frac{a^3}{3} \right) = \frac{2}{3} \rho a^5 = \frac{2M}{3a^3} a^5 = \frac{2}{3} M a^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{12} &= - \int_V \rho x_1 x_2 dV = -\rho \int_0^a dx_1 \int_0^a dx_2 \int_0^a dx_3 x_1 x_2 = \\ &= -\rho a \int_0^a dx_1 x_1 \int_0^a dx_2 x_2 = -\rho a \frac{a^2}{2} \frac{a^2}{2} = -\frac{1}{4} \rho a^5 = -\frac{1}{4} \frac{M}{a^3} a^5 = -\frac{1}{4} M a^2 \end{aligned}$$

O resto das compoñentes non é necesario calculalas debido á simetría. O tensor de inercia completo é pois:

$$\mathbb{I} = M a^2 \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

2.2. Momento angular

No sistema ligado ó sólido:

$$\mathbf{L} = \sum_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} \times \mathbf{p}_{\alpha} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} \times \mathbf{v}_{\alpha} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\alpha})$$

e usando a identidade vectorial $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{A}) = (\mathbf{A}^2)\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{A}$

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} [(\mathbf{r}_{\alpha}^2)\boldsymbol{\omega} - (\mathbf{r}_{\alpha} \cdot \boldsymbol{\omega})\mathbf{r}_{\alpha}] \Rightarrow \\ \Rightarrow L_i &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} (x_{\alpha,k} x_{\alpha,k} \omega_i - x_{\alpha,i} x_{\alpha,j} \omega_j) = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \omega_j (\delta_{ij} x_{\alpha,k} x_{\alpha,k} - x_{\alpha,i} x_{\alpha,j}) \end{aligned}$$

é dicir:

$$L_i = I_{ij} \omega_j$$

ou:

$$\mathbf{L} = \mathbb{I} \cdot \boldsymbol{\omega}$$

e levando isto á expresión para a enerxía cinética de rotación:

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbb{I} \cdot \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L}$$

2.3. Momentos principais de inercia e eixos principais

Por ser o tensor de inercia real e simétrico é diagonalizable. Polo tanto, mediante unha transformación ortogonal do sistema de coordenadas, poderemos escribir \mathbb{I} de forma diagonal, con autovalores I_i , chamados *momentos principais de inercia*, nunha base que determina os *eixos principais*. Cando estamos nesta base a enerxía cinética exprésase como

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbb{I} \cdot \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} (I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2)$$

e o momento angular total :

$$\mathbf{L} = \mathbb{I} \cdot \boldsymbol{\omega} = (I_1 \omega_1, I_2 \omega_2, I_3 \omega_3)$$

Como os momentos principais de inercia son as solucións da ecuación de valores propios:

$$\mathbf{L} = \mathbb{I} \cdot \boldsymbol{\omega} = I \boldsymbol{\omega}$$

vemos que se temos un xiro arredor dun dos eixos principais de inercia os vectores momento angular \mathbf{L} e velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ son paralelos, estando ambos na dirección do correspondente eixo principal.

En xeral, nos problemas que trataremos os corpos terán determinadas simetrías que nos permiten atopar facilmente os eixos principais. Se o noso corpo ten un eixo de simetría, este será sempre un eixo principal. Por exemplo, para un sólido de revolución, o eixo de revolución será un eixo principal, e os outros dous serán eixos perpendiculares calquera no plano normal (dexeneración 2 dun dos autovalores).

Se temos un corpo no que $I_1 = I_2 = I_3$ falamos de *trompo esférico* (esfera, cubo,...)

Se $I_1 = I_2 \neq I_3$ temos un *trompo simétrico* (buxaina, cilindro,...)

Se $I_1 \neq I_2 \neq I_3$ estamos ante un *trompo asimétrico*.

2.3.1. Exemplo: eixos principais dun cubo

Os momentos principais de inercia para o cubo homoxéneo do exemplo son:

$$I_1 = I_2 = \frac{11}{12} M a^2 \quad I_3 = \frac{1}{6} M a^2$$

O eixo principal na dirección do vector propio correspondente a I_3 vén dado pola solución de:

$$\mathbb{I} \cdot \mathbf{e}_3 = \frac{1}{6} M a^2 \mathbf{e}_3,$$

que normalizada é:

$$\mathbf{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1).$$

Cos eixos centrados nesta orixe, o cubo compórtase como un trompo simétrico co eixo principal distinguido na dirección da diagonal do cubo, cos outros eixos principais no plano perpendicular a este.

2.4. Teorema de Steiner

Sabemos que a forma do tensor de inercia depende da nosa elección da orixe de coordenadas, e agora trataremos de ver cómo relacionar o tensor \mathbb{I} nun punto arbitrario co tensor calculado no sistema centrado no centro de masas do corpo se mantemos os eixos coordenados paralelos na traslación.

Se chamamos \mathbf{R} ó vector que une a orixe do sistema no que queremos calcular o tensor de inercia e o centro de masas do sólido, \mathbf{r} ó vector de posición respecto ao primeiro sistema e \mathbf{r}^{CM} ao vector de posición no sistema de centro de masas, entón:

$$\begin{aligned} I_{ij} & \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\delta_{ij} x_{\alpha,k} x_{\alpha,k} - x_{\alpha,i} x_{\alpha,j}) = \\ & = \sum_{\alpha} m_{\alpha} [\delta_{ij} (X_k + x_{\alpha,k}^{\text{CM}})(X_k + x_{\alpha,k}^{\text{CM}}) - (X_i + x_{\alpha,i}^{\text{CM}})(X_j + x_{\alpha,j}^{\text{CM}})] = \\ & = \sum_{\alpha} m_{\alpha} [\delta_{ij} (X_k X_k + 2X_k x_{\alpha,k}^{\text{CM}} + x_{\alpha,k}^{\text{CM}} x_{\alpha,k}^{\text{CM}}) - \\ & \quad - (X_i X_j + X_i x_{\alpha,j}^{\text{CM}} + X_j x_{\alpha,i}^{\text{CM}} + x_{\alpha,i}^{\text{CM}} x_{\alpha,j}^{\text{CM}})] \end{aligned}$$

separando os termos que só dependen de \mathbf{r}^{CM} , os que dependen só de \mathbf{R} e os termos cruzados chegamos a:

$$I_{ij} = I_{ij}^{\text{CM}} + M(\delta_{ij} X_k X_k - X_i X_j) + \text{termos cruzados}$$

Pero os termos cruzados anuláanse, xa que neles sempre aparecerán as coordenadas do centro de masas no sistema centrado no propio centro de masas (expresións do tipo $\sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha,i}^{\text{CM}}$, que son cero por definición).

O resultado ao que chegamos é coñecido como *teorema de Steiner*:

$$I_{ij} = I_{ij}^{\text{CM}} + M(\delta_{ij} R^2 - X_i X_j).$$

En forma matricial:

$$\mathbb{I} = \mathbb{I}^{\text{CM}} + M[\mathbf{R}^2 \mathbf{1} - \mathbf{R} \otimes \mathbf{R}]$$

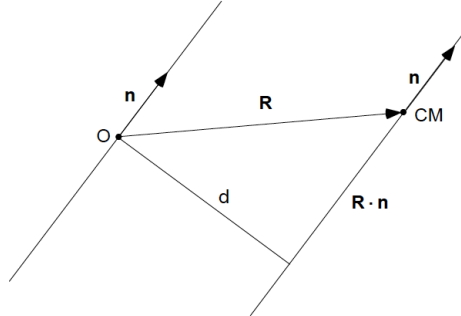


Figura 2: Teorema de Steiner para eixos paralelos

Existe unha versión reducida deste teorema que nos sirve para calcular o momento de inercia respecto a un eixo arbitrario a partir do momento de inercia dun eixo paralelo que pase polo centro de masas separado do primeiro unha distancia d :

$$\begin{aligned} I_{\mathbf{n}} &= \mathbf{n} \cdot \mathbb{I} \cdot \mathbf{n} = n^i I_{ij} n^j = n^i [I_{ij}^{\text{CM}} + M(\delta_{ij} \mathbf{R}^2 - X_i X_j)] n^j = \\ &= I_{\mathbf{n}}^{\text{CM}} + M[\mathbf{R}^2 - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{R})^2] \Rightarrow I_{\mathbf{n}} = I_{\mathbf{n}}^{\text{CM}} + Md^2 \end{aligned}$$

2.4.1. Exemplo: tensor de inercia dun cubo homoxéneo respecto ao CM

No exemplo anterior calculamos o tensor de inercia para un cubo homoxéneo respecto aos eixos centrados nun vértice e paralelos ás súas arestas. Podemos obter o tensor de inercia respecto aos eixos coa mesma orientación coa orixe no centro de masas do cubo utilizando o teorema de Steiner para $\mathbf{R} = (\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2})$, $\mathbf{R}^2 = \frac{3}{4}a^2$. Entón:

$$\mathbf{R}^2 \mathbf{1} - \mathbf{R} \otimes \mathbf{R} = \frac{3}{4}a^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{4}a^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

e temos que

$$\begin{aligned} \mathbb{I}^{\text{CM}} &= \mathbb{I} - M[\mathbf{R}^2 \mathbf{1} - \mathbf{R} \otimes \mathbf{R}] = \\ &= Ma^2 \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} - Ma^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = Ma^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

como se pode comprobar doadamente facendo o cálculo respecto do CM dende o principio.

2.5. Ángulos de Euler

Necesitamos facer unha elección das tres coordenadas xeneralizadas necesarias para determinar completamente unha rotación no espazo tridimensional. O convenio que imos utilizar é debido a Euler, que parametrizou unha rotación arbitraria mediante os ángulos de tres rotacións sucesivas do xeito que describimos a continuación (*ángulos de Euler*).

Consideremos un sistema de eixos XYZ e outro sistema $X'Y'Z'$ rotado respecto do primeiro. A orientación destes eixos pode acadarse sempre mediante o seguinte proceso que involucra tres rotacións sucesivas:

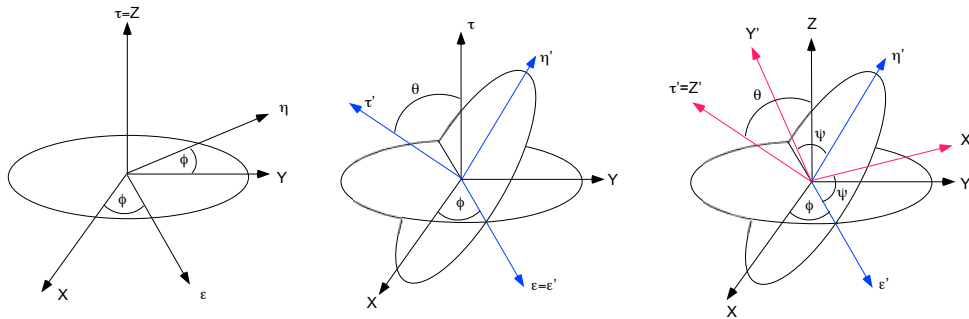


Figura 3: Ángulos de Euler

- Primeiro facemos unha rotación de ángulo ϕ arredor do eixo Z , que transforma os eixos iniciais XYZ nun novo sistema $\epsilon\eta\tau$. Loxicamente os eixos Z e τ coinciden ao seren o eixo de rotación. A matriz asociada a esta primeira rotación é:

$$D = \begin{pmatrix} \cos \phi & \text{sen } \phi & 0 \\ -\text{sen } \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- O segundo paso é unha rotación de ángulo θ arredor do eixo horizontal ϵ , que transforma os eixos $\epsilon\eta\tau$ nos novos $\epsilon'\eta'\tau'$. Neste caso, o eixo invariante é o primeiro, e a matriz asociada:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \text{sen } \theta \\ 0 & -\text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

- Por último facemos unha rotación de ángulo ψ arredor de τ' , para definitivamente pasar do sistema $\epsilon'\eta'\tau'$ ao sistema final $X'Y'Z'$. Nesta

rotación o terceiro eixo queda invariante e a matriz correspondente é:

$$B = \begin{pmatrix} \cos \psi & \operatorname{sen} \psi & 0 \\ -\operatorname{sen} \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Resumindo, o proceso é o seguinte:

$$XYZ \xrightarrow[D]{\phi, Z} \epsilon\eta\tau \xrightarrow[C]{\theta, \epsilon} \epsilon'\eta'\tau' \xrightarrow[B]{\psi, \tau'} X'Y'Z'$$

Pódese ver que estas tres rotacións son independentes e que con elas pode representarse calquera rotación dos eixos de coordenadas no espazo. A matriz de transformación global A obtense como a aplicación sucesiva destas tres matrices $A = BCD$:

$$A = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \phi - \cos \theta \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \psi & \cos \psi \operatorname{sen} \phi + \cos \theta \cos \phi \operatorname{sen} \psi & \operatorname{sen} \psi \operatorname{sen} \theta \\ -\operatorname{sen} \psi \cos \phi - \cos \theta \operatorname{sen} \phi \cos \psi & -\operatorname{sen} \psi \operatorname{sen} \phi + \cos \theta \cos \phi \cos \psi & \cos \psi \operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi & -\operatorname{sen} \theta \cos \phi & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Vexamos agora cómo podemos escribir a velocidade angular dun sólido en función dos ángulos de Euler. As velocidades angulares asociadas a cada unha das tres rotacións están dirixidas ao longo dos respectivos eixos de rotación:

$$\omega_\phi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} \Big|_{XYZ} \quad \omega_\theta = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Big|_{\epsilon\eta\tau} \quad \omega_\psi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \Big|_{\epsilon'\eta'\tau'}$$

onde indicamos en que base está expresado cada un destes vectores. Agora só temos que aplicar as matrices de transformación correspondentes para expresar os tres vectores na base final e sumalos:

$$\omega = BC \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \Rightarrow \quad (2)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \omega_{x'} \\ \omega_{y'} \\ \omega_{z'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\phi} \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \psi + \dot{\theta} \cos \psi \\ \dot{\phi} \operatorname{sen} \theta \cos \psi - \dot{\theta} \operatorname{sen} \psi \\ \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} \end{pmatrix} \quad (3)$$

3. Dinámica do corpo ríxido

3.1. Ecuacións de Euler

Agora que xa temos todas as ferramentas necesarias pasaremos a analizar o movemento dun sólido ríxido buscando as súas ecuacións de movemento. Pola súa simplicidade comezaremos analizando o caso libre.

3.1.1. Caso libre

No caso libre, ao non existiren forzas externas, o movemento do centro de masas será uniforme, polo que sempre podemos pasar a un sistema inercial no que este se atope en repouso. Neste sistema de referencia a lagrangiana é simplemente a enerxía cinética do corpo, que é a enerxía cinética de rotación. Ademais sempre poderemos tomar o sistema no que o tensor de inercia é diagonal, simplificando aínda máis o problema. Obtemos:

$$L = T_{rot} = \frac{1}{2}I_1(\omega_1)^2 + \frac{1}{2}I_2(\omega_2)^2 + \frac{1}{2}I_3(\omega_3)^2$$

Escribamos a ecuación de Euler-Lagrange para a coordenada ψ :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \psi} = 0,$$

ou, aplicando a regra da cadea:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \omega_i} \frac{\partial \omega_i}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \omega_i} \frac{\partial \omega_i}{\partial \psi} = 0.$$

Como estamos no sistema de eixos principais, temos que

$$\frac{\partial T}{\partial \omega_i} = I_i \omega_i \quad (\text{sen suma en } i)$$

Necesitamos ademais as derivadas das compoñentes da velocidade angular respecto de ψ . Para isto utilizamos as expresións (3):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_1}{\partial \psi} &= \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi = \omega_2 \\ \frac{\partial \omega_2}{\partial \psi} &= -\dot{\phi} \sin \theta \sin \psi - \dot{\theta} \cos \psi = -\omega_1 \\ \frac{\partial \omega_3}{\partial \psi} &= 0 \\ \frac{\partial \omega_1}{\partial \dot{\psi}} &= \frac{\partial \omega_2}{\partial \dot{\psi}} = 0 \\ \frac{\partial \omega_3}{\partial \dot{\psi}} &= 1 \end{aligned}$$

e poñendo todos os ingredientes xuntos, chegamos á ecuación:

$$I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_1 \omega_2 = 0.$$

Efectuando o cálculo análogo para as outras coordenadas, ϕ , θ , chegaremos ás restantes ecuacións do movemento. Non obstante, isto non é necesario, pois tendo en conta que a elección dos eixos como 1, 2 e 3 é arbitraria, a

ecuación anterior seguirá sendo válida para permutacións cíclicas nos índices. Con iso chegamos ás ecuacións de Euler para o caso libre:

$$\begin{aligned} I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3 &= 0 \\ I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_3 \omega_1 &= 0 \\ I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_1 \omega_2 &= 0 \end{aligned}$$

Estas ecuacións podemos escribilas como

$$I_i \frac{d\omega_i}{dt} + \epsilon_{ijk} \omega_j (I_k \omega_k) \quad (\text{sen suma en } i)$$

ou en forma vectorial:

$$\mathbb{I} \cdot \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbb{I} \cdot \boldsymbol{\omega}) = 0 \Rightarrow \frac{d\mathbf{L}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} = 0$$

Esta ecuación é válida para o sistema de eixos móbiles solidario ó sólido. Se agora estamos nun sistema no que os eixos están fixos, como vimos anteriormente:

$$\left. \frac{d\mathbf{L}}{dt} \right|_{\text{móviles}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} = 0 \Rightarrow \left. \frac{d\mathbf{L}}{dt} \right|_{\text{fixos}} = 0,$$

que non é máis que a ecuación de Newton para a rotación dun sistema libre no sistema de referencia inercial.

3.1.2. Caso con momentos externos

No caso no que haxa forzas externas teríamos que aplicar a ecuación:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dT}{d\dot{\psi}} \right) - \frac{dT}{d\psi} = Q_\psi$$

onde Q_ψ é a forza xeneralizada na dirección da coordenada ψ , que escribimos:

$$Q_\psi = \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \psi} = F_i \frac{\partial x_i}{\partial \psi} = F_i \frac{\partial x_i}{\partial \Omega_j} \frac{\partial \Omega_j}{\partial \psi} \quad (4)$$

Lembremos que $d\mathbf{r} = d\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$, ou $dx_i = \epsilon_{ijk} d\Omega_j x_k$, de onde

$$\frac{\partial x_i}{\partial \Omega_j} = \epsilon_{ijk} x_k \quad (5)$$

Ademais, tendo en conta que $d\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega} dt$ e da expresión de $\boldsymbol{\omega}$ en termos dos ángulos de Euler (3) temos:

$$\begin{aligned} d\Omega_1 &= d\phi \sin \theta \sin \psi + d\theta \cos \psi \\ d\Omega_2 &= d\phi \sin \theta \cos \psi - d\theta \sin \psi \\ d\Omega_3 &= d\phi \cos \theta + d\psi \end{aligned}$$

polo que:

$$\frac{\partial \Omega_1}{\partial \psi} = \frac{\partial \Omega_2}{\partial \psi} = 0, \quad \frac{\partial \Omega_3}{\partial \psi} = 1. \quad (6)$$

Substituíndo (5) e (6) en (4):

$$Q_\psi = F_i \frac{\partial x_i}{\partial \Omega_3} \frac{\partial \Omega_3}{\partial \psi} = F_i \epsilon_{i3k} x_k = \epsilon_{3ki} x_k F_i = (\mathbf{r} \times \mathbf{F})_3 = \mathbf{M}_3,$$

onde $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ é o momento das forzas respecto a orixe.

A ecuación para ψ queda entón, no caso de forzas externas:

$$I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_1 \omega_2 = M_3,$$

e utilizando de novo a permutación cíclica dos índices, o conxunto de ecuacións de Euler

$$\begin{aligned} I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3 &= M_1 \\ I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_3 \omega_1 &= M_2 \\ I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_1 \omega_2 &= M_3 \end{aligned}$$

Analogamente a como fixeramos no caso libre, escribimos estas ecuacións de Euler como:

$$\mathbb{I} \cdot \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbb{I} \cdot \boldsymbol{\omega}) = \mathbf{M} \quad (7)$$

onde salientamos que non é necesario especificar se estamos no sistema de eixos fixos ou móbiles xa que

$$\left. \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \right|_{\text{fixos}} = \left. \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \right|_{\text{móbiles}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} = \left. \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \right|_{\text{móbiles}}.$$

As ecuacións (7) son, de novo, as ecuacións de Newton para a rotación, neste caso con momentos externos:

$$\left. \frac{d\mathbf{L}}{dt} \right|_{\text{móbiles}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} = \mathbf{M} \Rightarrow \left. \frac{d\mathbf{L}}{dt} \right|_{\text{fixos}} = \mathbf{M}$$

Da ecuación de Euler deducimos que un corpo ríxido libre non pode xirar con $\boldsymbol{\omega}$ constante a non ser que o faga arredor dun eixo principal, xa que, se $\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = 0$ e $\mathbf{M} = 0$, entón $\boldsymbol{\omega} \times (\mathbb{I} \cdot \boldsymbol{\omega}) = 0$ e, polo tanto $\boldsymbol{\omega}$ e $\mathbb{I} \cdot \boldsymbol{\omega}$ son paralelos, ou o que é o mesmo, $\boldsymbol{\omega}$ é un autovector: está na dirección dun eixo principal. Se este non é o caso hai que aplicar un momento externo \mathbf{M} .

3.1.3. Conservación da enerxía

Se agora tomamos a ecuación de Euler e multiplicamos pola esquerda por $\boldsymbol{\omega}$, de forma que o segundo sumando do primeiro termo desaparece (é perpendicular a $\boldsymbol{\omega}$)

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbb{I} \cdot \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\omega}$$

e tendo en conta que \mathbb{I} é simétrico

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbb{I} \cdot \boldsymbol{\omega}) = \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\omega} \Rightarrow \frac{d}{dt} T_{rot} = \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\omega}$$

Para buscar solucións a estas ecuacións temos que fixar as forzas externas. Os dous casos que trataremos serán o do trompo simétrico libre e o do trompo pesado cun punto fixo.

3.2. Trompo simétrico libre

Consideremos un corpo tal que $I_1 = I_2 \neq I_3$ que rota libremente sen ningunha forza externa. As ecuacións de Euler neste caso toman a forma:

$$\begin{aligned} I_1 \dot{\omega}_1 &= (I_1 - I_3) \omega_2 \omega_3 \\ I_1 \dot{\omega}_2 &= (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1 \\ I_3 \dot{\omega}_3 &= 0 \end{aligned}$$

Co cal $\omega_3 = \text{cte}$ e podemos tomalo como unha condición inicial. Desacoplando o sistema de dúas ecuacións restante (derivando unha delas respecto ó tempo e substituíndo a outra) obtense:

$$\ddot{\omega}_2 + \left(\frac{I_1 - I_3}{I_1} \omega_3 \right)^2 \omega_2 = 0,$$

que é a ecuación dun oscilador harmónico simple, da cal coñecemos a solución:

$$\omega_2 = A \text{sen}(\Omega t) \quad \text{onde} \quad \Omega = \frac{I_3 - I_1}{I_1} \omega_3$$

Coñecido ω_2 podemos calcular ω_1 :

$$\omega_1 = \frac{I_1 \dot{\omega}_2}{(I_3 - I_1) \omega_3} \Rightarrow \omega_1 = A \text{cos}(\Omega t)$$

A solución que obtemos é que o vector $\omega_1 \mathbf{e}_1 + \omega_2 \mathbf{e}_2$ ten módulo constante A e xira arredor do eixo de simetría con frecuencia angular constante Ω . Como ω_3 tamén era constante, a velocidade angular terá módulo constante $\omega = \sqrt{A^2 + (\omega_3)^2}$ e xirará arredor da dirección definida por \mathbf{e}_3 . Isto é o que chamamos *movemento de precesión* do trompo libre. Canta maior diferenza

haxa entre os valores dos momentos de inercia no sistema de eixos principais maior será a frecuencia de precesión.

As constantes A e ω_3 relaciónanse coa enerxía e o momento angular do sistema como:

$$T_{rot} = \frac{1}{2}I_1(\omega_1)^2 + \frac{1}{2}I_1(\omega_2)^2 + \frac{1}{2}I_3(\omega_3)^2 = \frac{1}{2}I_1A^2 + \frac{1}{2}I_3(\omega_3)^2$$

$$L^2 = (I_1\omega_1)^2 + (I_1\omega_2)^2 + (I_3\omega_3)^2 = I_1^2A^2 + I_3^2(\omega_3)^2$$

Nunha primeira aproximación, estes resultados poden aplicarse ao movemento de rotación da Terra, pois os momentos externos debidos ao Sol e á Lúa poden considerarse nulos. A Terra é aproximadamente simétrica respecto ao eixo polar e lixeiramente achatada, polo que $I_1 = I_2$ e I_3 é lixeiramente maior que I_1 :

$$\frac{I_3 - I_1}{I_1} \approx 0,00327 \approx \frac{1}{300}$$

A frecuencia angular de precesión será

$$\Omega = \frac{I_3 - I_1}{I_1} \omega_3 \approx \frac{\omega_3}{300},$$

polo que o período de precesión será unhas 300 veces o de rotación, ou sexa, uns 300 días ou 10 meses. A amplitude é en realidade moi pequena (uns 5 m) e o período de 427 días (xa que a Terra non é perfectamente homoxénea, nin ríxida, nin libre).

3.3. Trompo simétrico pesado cun punto fixo

De novo temos un trompo simétrico ($I_1 = I_2$), pero neste caso estará sometido a un campo gravitatorio externo. Consideraremos ademais que un punto do eixo de simetría do corpo está sempre en repouso. Este problema é o dunha buxaina xirando co seu punto de contacto co chan fixo (*trompo de Lagrange*)

Neste caso o sistema máis conveniente non é o que ten a súa orixe no centro de masas, senón o que a ten no punto fixo do corpo. A enerxía cinética do corpo será a enerxía cinética de rotación respecto do punto fixo, que escrita en función dos ángulos de Euler será:

$$T = T_{rot} = \frac{1}{2}I_1(\omega_1)^2 + \frac{1}{2}I_1(\omega_2)^2 + \frac{1}{2}I_3(\omega_3)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}I_1(\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}I_3(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2$$

e se a distancia entre o punto fixo e o centro de masas do corpo é l , entón a enerxía potencial será:

$$V = mgl \cos \theta$$

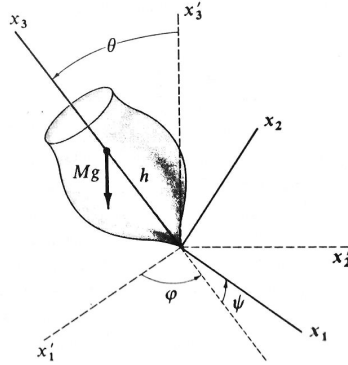


Figura 4: Trompo de Lagrange

co cal xa podemos escribir a lagrangiana do sistema:

$$L = \frac{1}{2}I_1(\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}I_3(\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 - mgl \cos \theta$$

As coordenadas ϕ e ψ son cíclicas, co cal os seus momentos conxugados conservaranse. O momento p_ϕ corresponde á compoñente do momento angular na dirección do eixo Z , mentres que p_ψ será a compoñente do momento angular no eixo de simetría do corpo Z' . O valor destes momentos é:

$$L_z = p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = (I_1 \sin^2 \theta + I_3 \cos^2 \theta)\dot{\phi} + I_1 \dot{\psi} \cos \theta$$

$$L_{z'} = p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)I_3 = I_3 \omega_3 (\Rightarrow \omega_3 = cte)$$

E despxando de aquí $\dot{\phi}$ e $\dot{\psi}$

$$\dot{\phi} = \frac{p_\phi - p_\psi \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta}$$

$$\dot{\psi} = \frac{p_\psi - I_3 \dot{\phi} \cos \theta}{I_3} = \frac{p_\psi}{I_3} - \cos \theta \left(\frac{p_\phi - p_\psi \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta} \right)$$

Ademais, como a gravidade é unha forza conservativa, teremos outra cantidade conservada no sistema, a súa enerxía, que coincidirá coa hamiltoniana H . A súa forma é:

$$H = T + V = \frac{1}{2}I_1(\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}I_3(\omega_3)^2 + mgl \cos \theta$$

pero por ser ω_3 constante podemos eliminar o segundo termo cambiando a nosa orixe de enerxías. Ademais podemos substituír $\dot{\phi}$ pola expresión obtida anteriormente, e así obtemos que a enerxía do sistema é:

$$E = \frac{1}{2}I_1 \dot{\theta}^2 + V(\theta) \quad \text{onde} \quad V(\theta) = \frac{(p_\phi - p_\psi \cos \theta)^2}{2I_1 \sin^2 \theta} + mgl \cos \theta$$

Agora temos un problema dunha soa variable cun potencial efectivo $V(\theta)$. Dadas unhas condicións iniciais poderíamos separar variables e integrar a ecuación para obter $\theta(t)$, resolvendo así formalmente o problema. Faremos aquí unha análise cualitativa das solucións, atendendo á curva do potencial efectivo.

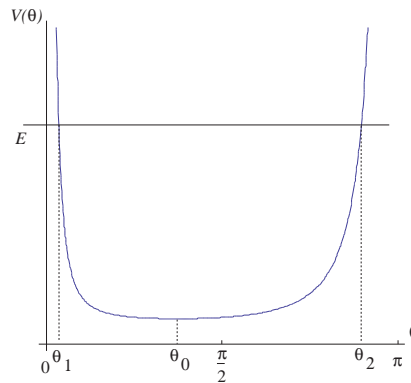


Figura 5: Potencial efectivo do trompo de Lagrange

O potencial efectivo ten un mínimo para un valor do ángulo θ_0 , de forma que se axustamos as condicións iniciais para que o movemento se produza co valor da enerxía correspondente a este mínimo teríamos simplemente un movemento de *precesión regular* do corpo.

Para calquera valor da enerxía do sistema por riba deste mínimo, teríamos unha velocidade $\dot{\theta}$ distinta de cero e o ángulo polar oscilará entre un valor mínimo θ_1 e un valor máximo θ_2 , que son os puntos de retorno do problema unidimensional equivalente: movemento de *precesión con nutación*. Neste caso, e dependendo dos valores de p_ψ , p_ϕ e E pode ocorrer que:

- $\dot{\phi}$ teña sempre o mesmo signo, $\dot{\phi}(\theta_1) > 0$, $\dot{\phi}(\theta_2) > 0$ (o movemento no ángulo azimutal transcorre sempre na mesma dirección).
- $\dot{\phi}$ teña distinto signo nos valores extremos de θ $\dot{\phi}(\theta_1) < 0$, $\dot{\phi}(\theta_2) > 0$ (o sentido de movemento no azimut inverterase nos cabeceos).
- no valor mínimo de θ se cumpra $\dot{\phi}(\theta_1) = 0$. Esta é a situación na que o peón comeza a caer dende o repouso, ata que acada o outro punto de retorno con $\dot{\phi}(\theta_2) > 0$ e volta a subir para reanudar o ciclo.

3.4. Estabilidade das solucións

Consideremos que temos un corpo rotando arredor dun eixo principal. Trataremos de analizar o que ocorre se aplicamos unha pequena perturbación a ese movemento.

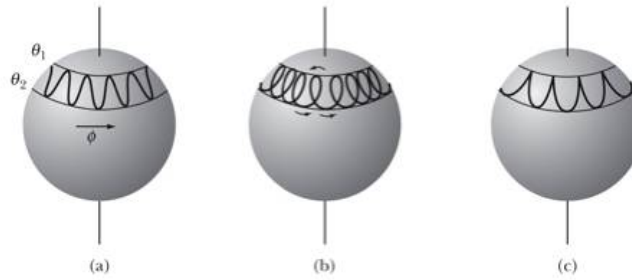


Figura 6: Traxectorias do eixo do trompo de Lagrange

Tomemos un sólido xirando arredor dun dos seus eixos principais, é dicir, $\boldsymbol{\omega} = \omega_1 \mathbf{e}_1$. Agora perturbamos lixeiramente o movemente, de forma que $\boldsymbol{\omega}$ pasa a ser $\boldsymbol{\omega} = \omega_1 \mathbf{e}_1 + \lambda \mathbf{e}_2 + \mu \mathbf{e}_3$, onde λ e μ son moi pequenos. As ecuacións de Euler no sistema de eixos principais quedan:

$$I_1 \dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3) \lambda \mu = 0$$

$$I_2 \dot{\lambda} - (I_3 - I_1) \omega_1 \mu = 0$$

$$I_3 \dot{\mu} - (I_1 - I_2) \omega_1 \lambda = 0$$

Desprezando termos cuadráticos en μ e λ , a primeira dínos simplemente que $\omega_1 = \text{cte}$, polo tanto o interese está nas outras dúas, que desacoplando quedan

$$\ddot{\lambda} + \frac{(I_2 - I_1)(I_3 - I_1)}{I_1 I_3} (\omega_1)^2 \lambda = 0$$

e a mesma ecuación para μ . Dependendo do signo do coeficiente linear as solucións para λ e μ estarán acotadas (signo +, solución estable) ou non (signo - ou cero, solución inestable). Se os tres momentos de inercia son distintos, vemos que o xiro arredor dos eixos con maior e menor momento son estables, mentres que o xiro arredor do eixo con momento intermedio non o é. Se o trompo é simétrico, só o xiro arredor do eixo de simetría é estable.